IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)
e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 12, Issue 6 Ver. III (Nov. - Dec.2016), PP 76-78
www.iosrjournals.org

La Preuve De La Conjecture Jacobéenne

M. Sghiar
9 allée capitaine J. B. Bossu, 21240, Talant, France

Abstract: *In this article I will prove the Jacobian conjecture by using the Cauchy-Riemann equations.*
Résumé: *Dans cet article je démontre la conjecture Jacobienne en utilisant les équations de Cauchy-Riemann.*

I.Introduction

En géométrie algébrique, la **conjecture jacobienne** est une conjecture concernant les polynômes à plusieurs variables. Elle fut proposée en 1939 par Ott-Heinrich Keller , et Shreeram Abhyankar lui donna par la suite son nom actuel.En 1980, [**Stuart Sui-Sheng Wang**], démontra la conjecture jacobienne pour les polynômes de degré 2, et en 1982, [**Bass, Connell et Wright**] démontrèrent que le cas général est conséquence du cas particulier des polynômes de degré 3. La conjecture a été vérifiée par [**Moh**] pour les polynômes à deux variables de degré au plus 100. Rappelons que La conjecture jacobienne est équivalente à la conjecture de Dixmier (voir [**Pascal Kossivi Adjamagbo et Arno van den Essen**]).

II.Idée de la preuve

L'idée d'assimiler les points de l'espace à des particules m'a permis de donner cinq preuves du célèbre problème de hypothèse de Riemann que j'ai démontré dans [**M. Sghiar, 2015**]. Un peu plus tard, après avoir résolu l'équation de Navier-Stokes [**M. Sghiar (October 2016)]** qui a un lien étroit avec la physique, j'ai démontré dans [**M. Sghiar**](Nov.-Dec. 2016) le 16-problème de Hilbert- qui semblait être le plus insaisissable des problèmes de Hilbert après le problème de l'Hypothèse de Riemann- en m'inspirant encore une fois d'une idée physique : Celle d'un oscillateur en physique. Dans cette article, pour résoudre la conjecture jacobienne, j'ai considéré un point z de $\mathbb{C}^n$ comme une particule, les polynômes f_i comme des forces agissantes sur la particule z, et j'ai étudié la résultante des forces $\sum_{i=1}^{N} f_i(z)$ agissante sur z.

Comme dans la preuve du 16-problème de Hilbert [**M. Sghiar**](Nov.-Dec. 2016), je vais utiliser encore une fois le théorème de Rolle-Bhaskara tout en exploitant une propriété fondamentale des fonctions holomorphes – **Equations de Cauchy-Riemann**- pour pouvoir aboutir à la preuve de la conjecture Jacobienne.

III.Rappel, Notations et définitions

Pour N > 1, soient N polynômes f_i (pour $1 \leq i \leq N$) dans les variables $X_1, \ldots, X_N$ dont les coefficients appartiennent à un corps algébriquement clos k (on peut en fait supposer que $k = \mathbb{C}$, le corps des nombres complexes). Considérons cette suite de polynômes comme une fonction vectorielle $f : k^N \to k^N$ dont les composantes sont les f_i .

Le *jacobien J* de *f* est par définition le déterminant de la matrice jacobienne $N \times N$ formée des dérivées partielles des f_i par rapport aux X_i : $J = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$.

J est lui-même une fonction polynomiale des *N* variables $X_1, \ldots, X_N$.

La condition $J \neq 0$ assure (pour des fonctions régulières, et donc en particulier pour des polynômes) l'existence d'un inverse local pour *f* (c'est le théorème des fonctions implicites) en chaque point où elle est vérifiée. Comme *k* est algébriquement clos, et que *J* est un polynôme, *J* s'annule pour certaines valeurs des X_1, …, X_N , sauf si *J* est constante. On en déduit facilement que :

Si *f* possède une fonction inverse (globale), c'est-à-dire s'il existe $g : k^N \to k^N$ telle que $g \circ f = f \circ g$ = identité (de k^N), alors *J* est une constante non nulle.

La conjecture Jacobienne affirme que sur tout corps de caractéristique 0, la réciproque est vraie :

Si J est une constante non nulle et si k est un corps de caractéristique 0, alors f admet un inverse $g : k^N \to k^N$, et *g est une fonction polynomiale*, c'est-à-dire que ses composantes sont données par des polynômes.

Comme il est connu qu'il suffit de démontrer le résultat dans le cas où le corps algébriquement clos $k=\mathbb{C}$, je vais me restreindre à ce dernier cas ($k=\mathbb{C}$).

IV.La preuve de la conjecture Jacobienne

Théorème : (La Conjecture jacobienne). Si $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ une application polynomiale telle que $f'(z)\neq 0 \quad \forall\ z\in\mathbb{C}^n$, alors f est bijective, et son inverse est aussi une fonction polynomiale.

Pour la preuve de la conjecture Jacobienne, on aura besoin des propositions suivantes :

Proposition 1. (Théorème de Michel Rolle et Bhaskara)[1]:

Si f est une fonction réelle continue sur l'intervalle [*a*, *b*], différentiable sur]a,b[avec *f*(*a*) = *f*(*b*), alors il existe c dans]a,b[tel que f'(c)=0.

Rappelons ce beau résultat trouvé par Białynicki-Birula and Rosenlicht [**Bia ynicki-Birula and Rosenlicht**], 1962 :

Proposition 2. (Théorème Białynicki-Birula, Rosenlicht).

Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit $f:k^N\to k^N$ une fonction polynomiale. Si f est injective, alors f est surjective et l' inverse est aussi une fonction polynomiale. C'est dire que f est un automorphisme polynomiale.

Ainsi, du Théorème de Białynicki-Birula, Rosenlicht, pour prouver la conjecture Jacobienne, il suffit de montrer que f est injective.

Preuve de la conjecture ($k=\mathbb{C}$):

On va prouver le résultat par l'absurde : Supposons que $J=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\neq 0$.

Si f n'est pas injective, alors il existe deux éléments distincts $a=(a_i)_i$ et $b=(b_i)_i$ tels que : $f(a)=f(b)$.

Posons :

$$S(\lambda)=\sum_{i=1}^{N} f_i(a_i+\lambda(b_i-a_i)) \quad \text{où } \lambda\in[0,1] \text{ et } f_i(a_i+\lambda(b_i-a_i))=f_i(a+\lambda(b-a))$$

En appliquant le théorème de Rolle-Bhaskara ci-dessus, on déduit qu'il existe λ tel que :

$\Re(S)'(\lambda)=0$ (où $\Re(S)$ est la partie réelle de S).

Soit : $$\sum_i\sum_j (b_i-a_i)\frac{\partial\Re(f_i)(a_i+\lambda(b_i-a_i))}{\partial x_j}=0$$

Qu'on peut écrire (puisque $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$) :

$$\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial\Re(f_i)(a_i+\lambda(b_i-a_i))}{\partial x_j^1},\frac{\partial\Re(f_i)(a_i+\lambda(b_i-a_i))}{\partial x_j^2}\right)\begin{pmatrix}\Re(b_i-a_i)\\ \Im(b_i-a_i)\end{pmatrix}=0$$

---

[1] Le mathématicien Indien Bhaskara II (1114–1185) est reconnu le premier ayant avoir trouvé le théorème de Rolle : R.C. Gupta, *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Westen Cultures*, p.156

(où $\Im$ est la partie imaginaire).

Par un changement convenable des variables, on peut se ramener au cas où : $\Re(b_i - a_i) = \Im(b_i - a_i) = 1, \ \forall \ i$

Et comme pour une fonction holomorphe , on a les **équations Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial \Im(f_i)(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j^1} = -\frac{\partial \Re(f_i)(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j^2}$$

Et

$$\frac{\partial \Im(f_i)(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j^2} = \frac{\partial \Re(f_i)(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j^1}$$

En fixant toutes les variables autres que x_j (identique : x_i est constante si $i \neq j$) , puis en fixant respectivement toutes les variables autres que x_j^1 (respectivement x_j^2):

On déduit que :

$$\sum_i (b_i - a_i) \frac{\partial \Re(f_i)(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j} = 0$$

De même, en utilisant les **équations Cauchy-Riemann ,** on a :

$$\sum_i (b_i - a_i) \frac{\partial \Im(f_i)(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j} = 0$$

Et comme $\forall \ k, \ f_k = \Re f_k + i \Im f_k$, alors des équations ci-dessus on déduit que :

$$\forall \ j \in [\![1, N]\!], \sum_i h_i \frac{\partial f_i(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j} = 0$$ où $h_i = b_i - a_i$

On en déduit que dans la matrice $\left(\frac{\partial f_i(a_i + \lambda(b_i - a_i))}{\partial x_j} \right)_{1 \le i \le N, 1 \le j \le N}$, la dernière colonne C_N s'écrit comme ceci : $C_N = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_i}{h_N} C_i$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne.

Donc $J = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} = 0$, ce qui est absurde.

Références

[1]. **A. Bia□ynicki-Birula and M. Rosenlicht]**, Injective morphisms of real algebraic varieties, Proceedings of the American Mathematical Society 13 (1962), 200–203.

[2]. **[Hyman Bass]**, Edwin H. Connell et David Wright, « The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse », *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*, 7, º 2, , 287-330 (OCLC 670617598, DOI 10.1090/S0273-0979-1982-15032-7).

[3]. **[Pascal Kossivi Adjamagbo et Arno van den Essen]**, « A proof of the equivalence of the Dixmier, Jacobian and Poisson conjectures », *Acta Math. Vietnam*, 32, º 2-3, , 205-214.

[4]. **[M. Sghiar]** (Décembre 2015) , Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l'hypothèse de Riemann, Pioneer Journal of Algebra, Number Theory and its Applications , Volume 10, Numbers 1-2, 2015, Pages 1-31.

[5]. **[M. Sghiar]**, (October 2016), Turbulent functions and solving the navier-stokes equation by fourier series, (IJEAT), ISSN: 2249-8958 (Online), Volume-6 Issue-1, Page No.: 79-80, October 2016.

[6]. [**M. Sghiar**](Nov.-Dec. 2016), Sur Le 16-Problème D' Hilbert, OSR Journal of Mathematics (IOSR-JM) e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 12, Issue 6 Ver. II, PP 22-25.

[7]. **[Stuart Sui-Sheng Wang]**, « A jacobian criterion for separability », J. Agebra, 65, , 453-494.

[8]. **[Tzuong-Tsieng Moh]** « On the Jacobian conjecture and the configurations of roots », *J. reine angew. Math.*, 340, , 140-212 .